Seri bahan kuliah Algeo #24

Perkalian Geometri
(Bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Multivector

- ***Multivecto*r adalah objek yang mengandung skalar, vektor, bivector, dan objek lain yang dihasilkan dengan perkalian geometri.**

- *Multivector* dapat dijumlahkan atau dikalikan seperti objek-objek geometri lainnya

- *Multivector* di R^2 mengandung skalar, vektor, dan *bivector*.

- *Multivector* di R^3 mengandung skalar, vektor, *bivector*, dan trivector.

- Dan seterusnya untuk *multivector* di ruang dimensi yang lebih tinggi.

Multivector di R^2

- *Multivector* di R^2 merupakan kombinasi linier dari skalar, vektor, dan *bivector.* Elemen-elemen di dalam *multivector* diresumekan pada tabel berikut:

TABLE 8.2

Element	Symbol	Grade
1 scalar	λ	0
2 vectors	$\{e_1, e_2\}$	1
1 unit bivector	$e_1 \wedge e_2 = e_{12}$	2

- Multivector *A* di R^2 dinyatakan sebagai

$$A = \underbrace{\lambda_0}_{\text{skalar}} + \underbrace{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2}_{\text{vektor}} + \underbrace{\lambda_3 (e_1 \wedge e_2)}_{\text{bivector}}$$

Contoh 1: Diberikan dua buah *multivector* A dan B sebagai berikut:

$$A = 4 + 3e_1 + 4e_2 + 5e_{12}$$

$$B = 3 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_{12}$$

(i) Penjumlahan

$$A + B = 7 + 5e_1 + 7e_2 + 9e_{12}$$

$$A - B = 1 + e_1 + e_2 + e_{12}$$

(ii) Perkalian

$$AB = (4 + 3e_1 + 4e_2 + 5e_{12})(3 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_{12})$$

(lakukan perkalian suku-suku seperti biasa,

dan gunakan $e_1^2 = e_2^2 = 1$, $e_{21} = -e_{12}$, $e_{12}^2 = -1$)

$$= 10 + 16e_1 + 26e_2 + 32e_{12} \quad \text{(tunjukkan!!)}$$

Rotasi Vektor di R^2

- Kembali ke bilangan kompleks

$$z = a + bi$$

- Rotasi bilangan kompleks z sejauh ϕ berlawanan arah jarum jam adalah:

$$z' = ze^{i\phi}$$

yang dalam hal ini,

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi \qquad \text{(formula Euler)}$$

- Karena $i^2 = I^2 = -1$, maka

$$e^{I\phi} = \cos\phi + I \sin\phi$$

sehingga

$$z' = ze^{I\phi}$$

- Jika Z adalah *multivector* yang terdiri dari scalar dan *bivector*, yang identik dengan bilangan kompleks z:

$$Z = a_1 + a_2 e_{12} \qquad \text{(identik dengan } z = a + bi \text{)}$$

maka

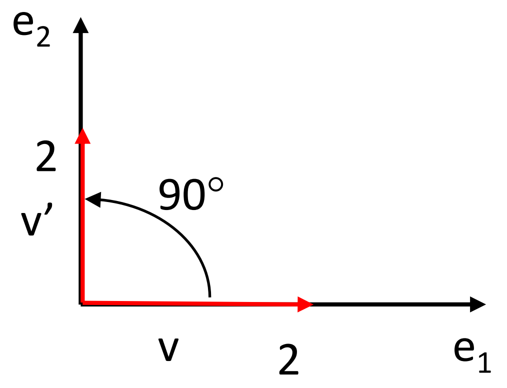
$$Z' = Ze^{I\phi}$$

- Untuk vektor $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$, dapat dibuktikan bahwa rotasi v sejauh ϕ menghasilkan vektor bayangan:

$$\boxed{v' = ve^{I\phi}}$$

Contoh 2: Misalkan $v = 2e_1$ diputar 90 derajat berlawanan arah jarum jam, maka

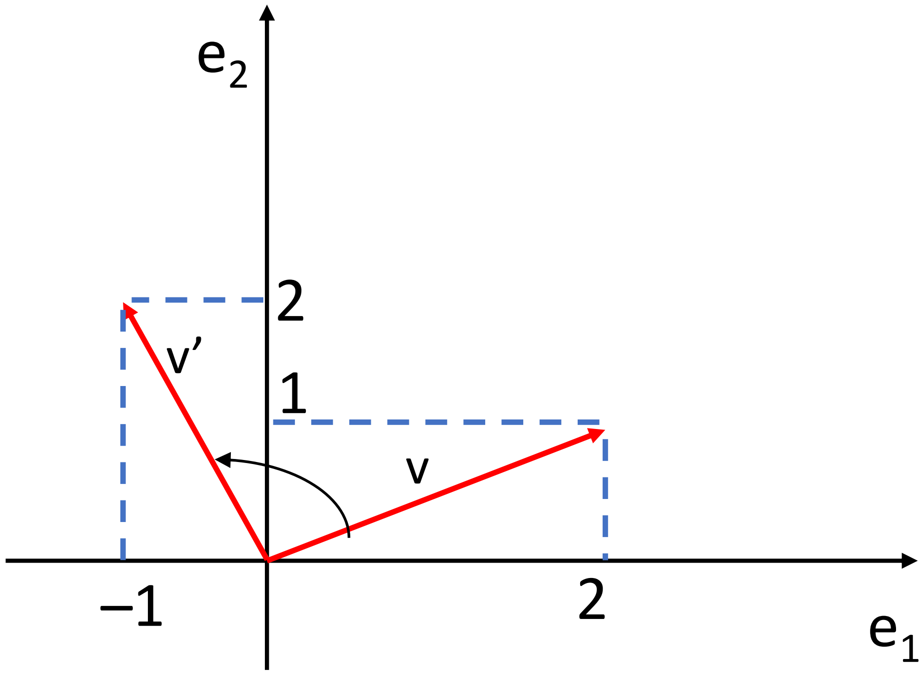
$$\begin{aligned} v' &= ve^{I\phi} = 2e_1 e^{I\phi} \\ &= 2e_1(\cos 90^\circ + I \sin 90^\circ) \\ &= 2e_1(0 + I) = 2e_1 I \\ &= 2e_1 e_{12} \qquad (\text{ingat, } I = e_1 \wedge e_2 = e_{12} = e_1 e_2 \text{ }) \\ &= 2e_1 e_1 e_2 = 2e_1^2 e_2 = 2(1)^2 e_2 = 2e_2 \end{aligned}$$



Contoh 3: Tentukan bayangan vektor $v = 2e_1 + e_2$ yang diputar 90 derajat berlawanan arah jarium jam.

<u>Jawaban</u>:

$$\begin{aligned} v' &= ve^{I\phi} = (2e_1 + e_2)\, e^{I\phi} \\ &= (2e_1 + e_2)\,(\cos 90^\circ + I \sin 90^\circ) \\ &= (2e_1 + e_2)(0 \;+ I) \\ &= (2e_1 + e_2)(I) \\ &= (2e_1 + e_2)(e_{12}) \\ &= 2e_1e_1e_2 + e_2e_1e_2 \\ &= 2e_1{}^2e_2 - e_2{}^2e_1 \\ &= 2(1)^2e_2 - (1)^2e_1 \\ &= -\,e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$



Latihan

- Diberikan sebuah vektor v = $4e_1 - 3e_2$, tentukan bayangan vektor setelah

  (a) diputar sejauh 45 derajat berlawanan arah jarum jam

  (b) diputar sejauh 120 derajat berlawaban arah jarum

  (c) diputar sejauh 90 searah jarum jam

Perkalian vektor dengan bivector di R^2

- Misalkan *a* adalah vector dan *B* adalah bivector:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$B = (b_1 e_1 + b_2 e_2) \wedge (c_1 e_1 + c_2 e_2)$$

- Hasil perkalian *a* dengan *B* menghasilkan *a*':

$$\begin{aligned} a' &= aB \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)((b_1 e_1 + b_2 e_2) \wedge (c_1 e_1 + c_2 e_2)) \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 c_1 e_1 \wedge e_1 + b_1 c_2 e_1 \wedge e_2 + b_2 c_1 e_2 \wedge e_1 + b_2 c_2 e_2 \wedge e_2) \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1) e_{12} \end{aligned}$$

$$= a_1(b_1c_2 - b_2c_1)e_1^2e_2 + a_2(b_1c_2 - b_2c_1)e_{212}$$

$$= a_1(b_1c_2 - b_2c_1)e_2 - a_2(b_1c_2 - b_2c_1)e_1$$

$$a' = -a_2(b_1c_2 - b_2c_1)e_1 + a_1(b_1c_2 - b_2c_1)e_2.$$

Namun karena

$$\|B\| = b_1c_2 - b_2c_1.$$

maka

$$a' = \|B\|(-a_2e_1 + a_1e_2).$$

yang artinya vektor *a* diputar sejauh 90 derajat berlawanan arah jarum jam dan diskalakan dengan *magnitude* bivector *B*.

- Jika urutan perkaliannya dibalik, maka

$$
\begin{aligned}
a' &= Ba \\
&= ((b_1 e_1 + b_2 e_2) \wedge (c_1 e_1 + c_2 e_2))(a_1 e_1 + a_2 e_2) \\
&= (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_{12} (a_1 e_1 + a_2 e_2) \\
&= a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_{121} + a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_{122} \\
&= -a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_2 + a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_1 \\
&= a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_1 - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) e_2 \\
a' &= \|B\| (a_2 e_1 - a_1 e_2).
\end{aligned}
$$

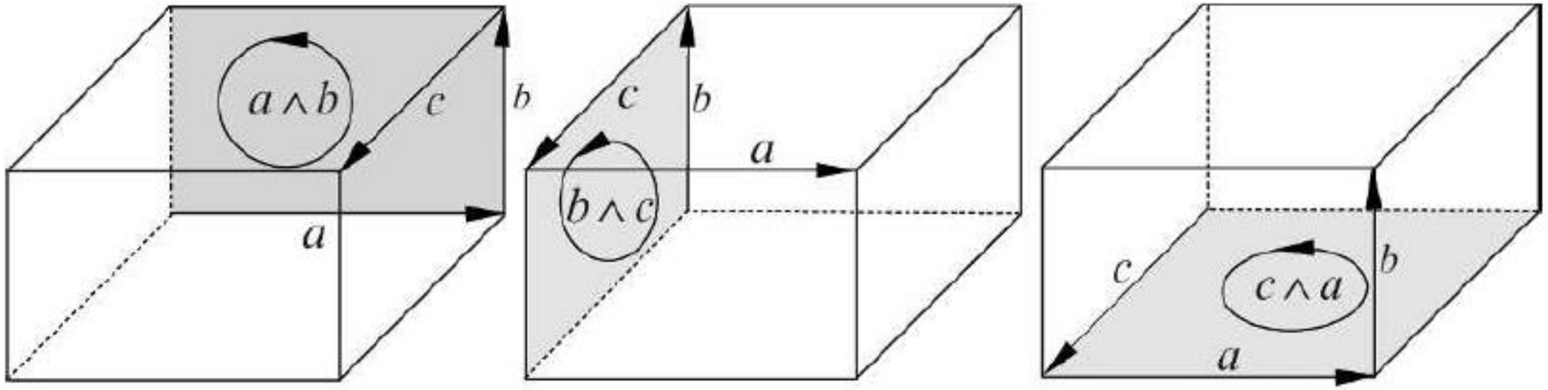
- yang artinya vektor *a* diputar sejauh 90 derajat searah jarum jam dan diskalakan dengan *magnitude* bivector *B*.

Trivector

- Pada materi sebelumnya (Algeo 22) sudah disinggung tentang *trivector*, yaitu objek berbentuk:

$$a \wedge b \wedge c$$

- Interpretasi geometri *trivector* adalah menyatakan volume *parallelpiped* yang dibentuk oleh vector *a*, *b*, dan *c*



(a) $(a \wedge b) \wedge c$. (b) $(b \wedge c) \wedge a$ (c) $(c \wedge a) \wedge b$.

- Ketiga buah volume tersebut identik:

$$(a \wedge b) \wedge c = (b \wedge c) \wedge a = (c \wedge a) \wedge b.$$

- Misalkan

$$a = a_1 \mathrm{e}_1 + a_2 \mathrm{e}_2 + a_3 \mathrm{e}_3$$

$$b = b_1 \mathrm{e}_1 + b_2 \mathrm{e}_2 + b_3 \mathrm{e}_3$$

$$c = c_1 \mathrm{e}_1 + c_2 \mathrm{e}_2 + c_3 \mathrm{e}_3$$

maka

$$a \wedge b \wedge c = (a_1 \mathrm{e}_1 + a_2 \mathrm{e}_2 + a_3 \mathrm{e}_3) \wedge (b_1 \mathrm{e}_1 + b_2 \mathrm{e}_2 + b_3 \mathrm{e}_3) \wedge (c_1 \mathrm{e}_1 + c_2 \mathrm{e}_2 + c_3 \mathrm{e}_3)$$

$$
\begin{aligned}
a \wedge b \wedge c &= (a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3) \wedge (b_1\mathrm{e}_1 + b_2\mathrm{e}_2 + b_3\mathrm{e}_3) \wedge (c_1\mathrm{e}_1 + c_2\mathrm{e}_2 + c_3\mathrm{e}_3) \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_1 + a_1b_2\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + a_1b_3\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_3 + \\ a_2b_1\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_1 + a_2b_2\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_2 + a_2b_3\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 + \\ a_3b_1\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1 + a_3b_2\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_2 + a_3b_3\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_3 \end{pmatrix} \wedge (c_1\mathrm{e}_1 + c_2\mathrm{e}_2 + c_3\mathrm{e}_3) \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_2\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 - a_1b_3\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1 - a_2b_1\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + \\ a_2b_3\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 + a_3b_1\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1 - a_3b_2\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 \end{pmatrix} \wedge (c_1\mathrm{e}_1 + c_2\mathrm{e}_2 + c_3\mathrm{e}_3) \\
a \wedge b \wedge c &= \begin{pmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 \\ +(a_3b_1 - a_1b_3)\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1 \end{pmatrix} \wedge (c_1\mathrm{e}_1 + c_2\mathrm{e}_2 + c_3\mathrm{e}_3) \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\mathrm{e}_{123} + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1\mathrm{e}_{123} + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2\mathrm{e}_{123} \\
&= ((a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3)\mathrm{e}_{123} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathrm{e}_{123}
\end{aligned}
$$

Pseudoscalar trivector satuan

- *Pseudoscalar* di R^2 (*bivector*):

$$I = e_1 \wedge e_2 = e_{12} = e_1 e_2$$

$$I^2 = (e_1 \wedge e_2)^2 = -1$$

- *Pseudoscalar* di R^3 (*trivector*):

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_{123} = e_1 e_2 e_3$$

$$\begin{aligned} I^2 = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)^2 &= (e_1 e_2 e_3)^2 \\ &= e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = e_1 e_2 e_1 e_3 e_3 e_2 \\ &= e_1 e_2 e_1 e_2 = -1 \end{aligned}$$

- Sudah dibahas sebelumnya bahwa

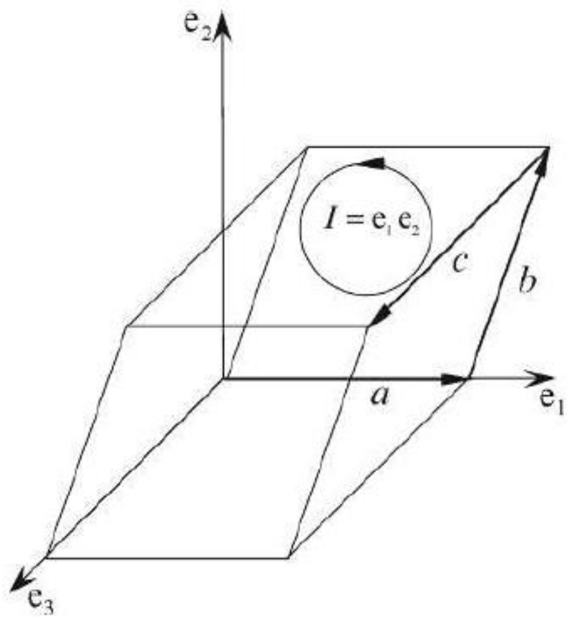
$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} e_{123}$$

maka volume *parallelpiped* adalah V = $\|a \wedge b \wedge c\|$

Contoh 4: Misalkan $a = 2e_1 \quad b = 0.5e_1 + 2e_2 \quad c = 3e_3.$

maka volume *parallelpiped* adalah

$$\begin{aligned} V &= \|a \wedge b \wedge c\| \\ &= \|2e_1 \wedge (0.5e_1 + 2e_2) \wedge 3e_3\| \\ &= \|4e_{12} \wedge 3e_3\| \\ &= \|12e_{123}\| \\ V &= 12. \end{aligned}$$



Latihan

Diberikan tiga buah vektor di R^3 sebagai berikut:

$$a = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$$

$$b = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

$$c = e_1 - 3e_2 - 2e_3$$

Tentukan volume *parallelpiped* yang dibentuk oleh vektor *a*, *b*, dan *c*.

Perkalian vektor basis satuan standard di R^3

- Vektor basis satuan standard di R^3 adalah e_1, e_2, dan e_3.
- Hasil perkalian vektor satuan standard dengan dirinya sendiri:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$$

- *Bivector* satuan standard:

$$e_{12} = e_1 \wedge e_2 \qquad e_{23} = e_2 \wedge e_3 \qquad e_{31} = e_3 \wedge e_1.$$

- Sifat imajiner bivector satuan:

$$e_{12}^2 = (e_1 \wedge e_2)^2 = -1$$

$$e_{23}^2 = (e_2 \wedge e_3)^2 = -1$$

$$e_{31}^2 = (e_3 \wedge e_1)^2 = -1.$$

Perkalian vektor dengan bivector satuan di R^3

- Diberikan vektor di R^3: $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

  dan bivector satuan: $e_{12} = e_1 \wedge e_2$

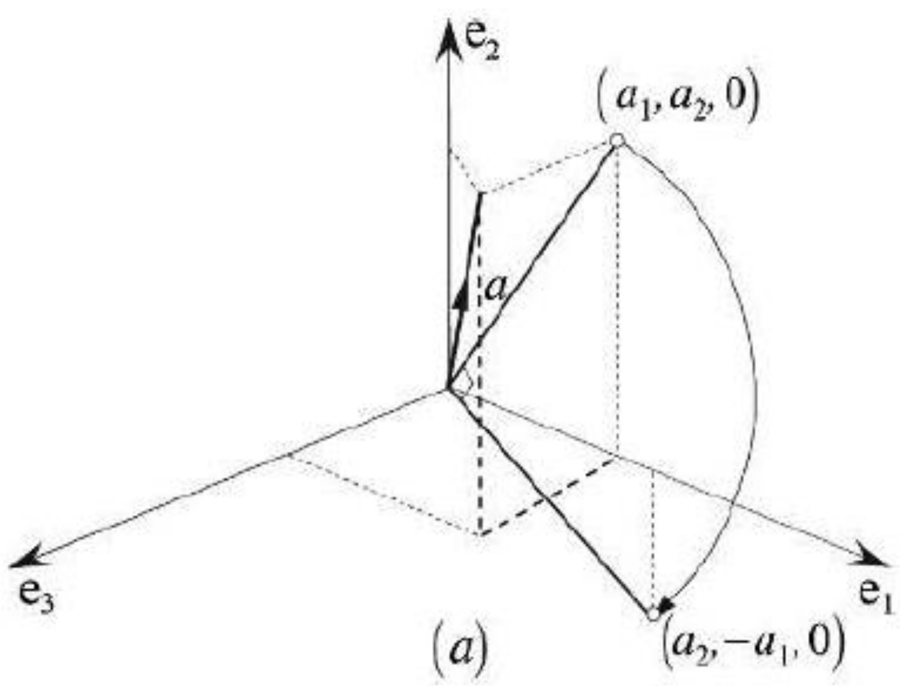
- Perkalian bivector satuan dengan vektor:

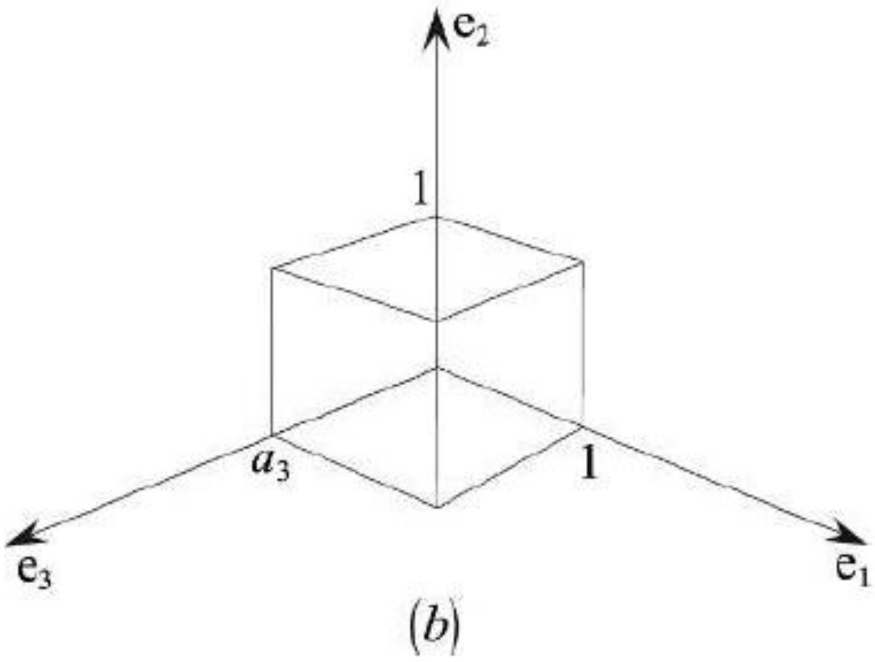
$$e_{12} a = a_1 e_{12} e_1 + a_2 e_{12} e_2 + a_3 e_{12} e_3$$

$$= -a_1 e_2 + a_2 e_1 + a_3 e_{123}$$

$$e_{12} a = \underbrace{a_2 e_1 - a_1 e_2}_{\text{vektor}} + \underbrace{a_3 e_{123}}_{\text{volume}}.$$

- Interpretasi geometrinya adalah, e_{12} menghasilkan efek:
  (i) merotasi proyeksi vektor *a* pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° searah jarum jam
  (ii) membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya e_3





- Jika urutan perkaliannya dibalik:

$$\begin{aligned} a\mathrm{e}_{12} &= a_1\mathrm{e}_1\mathrm{e}_{12} + a_2\mathrm{e}_2\mathrm{e}_{12} + a_3\mathrm{e}_3\mathrm{e}_{12} \\ &= a_1\mathrm{e}_2 - a_2\mathrm{e}_1 + a_3\mathrm{e}_{123} \\ a\mathrm{e}_{12} &= -a_2\mathrm{e}_1 + a_1\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_{123}. \end{aligned}$$

- Interpretasi geometrinya adalah, e_{12} menghasilkan efek:

  (i) merotasi proyeksi vektor *a* pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam

  (ii) membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya e_3

- Dengan cara yang sama, maka

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{23}a &= a_1\mathrm{e}_{23}\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_{23}\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_{23}\mathrm{e}_3 \\ &= a_1\mathrm{e}_{123} - a_2\mathrm{e}_3 + a_3\mathrm{e}_2 \\ &= a_3\mathrm{e}_2 - a_2\mathrm{e}_3 + a_1\mathrm{e}_{123} \end{aligned}$$

dan

$$a\mathrm{e}_{23} = -a_3\mathrm{e}_2 + a_2\mathrm{e}_3 + a_1\mathrm{e}_{123}.$$

- dan

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_{31}a &= a_1\mathrm{e}_{31}\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_{31}\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_{31}\mathrm{e}_3 \\ &= a_1\mathrm{e}_3 + a_2\mathrm{e}_{123} - a_3\mathrm{e}_1 \\ &= a_1\mathrm{e}_3 - a_3\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_{123} \end{aligned}$$

dan

$$a\mathrm{e}_{31} = -a_1\mathrm{e}_3 + a_3\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_{123}.$$

Latihan

Diberikan dua buah vektor di R^3 sebagai berikut:

$$a = e_1 - 4e_2 + 2e_3$$

$$b = 3e_1 + e_2 - 4e_3$$

Hitunglah $ae_{12} + be_{12}$

BERSAMBUNG